Classe de terminale S — Corrigé du devoir commun n°1.

EXERCICE 1 :

Proposition 1 : FAUSSE.

Justification : La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est un pentagone comme cela apparaît sur l'annexe 1.

Proposition 2 : VRAIE

Justification : On a $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = \overline{z_A} = -1 - i\sqrt{3}$

$z_C = -(z_A + z_B) = -(-1 + i\sqrt{3} + (-1) - i\sqrt{3}) = -(-2) = 2$

$AB = |z_B - z_A| = |(-1 - i\sqrt{3}) - (-1 + i\sqrt{3})| = |-1 - i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = |-2\sqrt{3}| \times |i| = 2\sqrt{3} \times 1 = 2\sqrt{3}$

$AC = |z_C - z_A| = |2 - (-1 + i\sqrt{3})| = |2 + 1 - i\sqrt{3}| = |3 - i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = |z_C - z_B| = |2 - (-1 - i\sqrt{3})| = |2 + 1 + i\sqrt{3}| = |3 + i\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On a $AB = AC = BC$ donc le triangle ABC est équilatéral.

Proposition 3. FAUSSE

Justification :

- Montrons l'égalité suggérée par l'énoncé

$(z - i)(z^2 - 2z + 2) = z^3 - 2z^2 + 2z - iz^2 + 2iz - 2i = z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i$

- Résolution de l'équation

$z^3 - (2+i)z^2 + 2(1+i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$
$\Leftrightarrow z = i$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0$

Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$

Discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4$. $\Delta < 0$ donc l'équation possède deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$

Montrons que ces solutions ne sont pas les affixes de trois points alignés.

Les points d'affixes $1 - i$ et $1 + i$ ont pour abscisse 1 donc appartiennent à la droite d'équation $x = 1$. Ce n'est pas le cas du point d'affixe i. Donc ces trois points ne sont pas alignés.

Proposition 4. VRAIE

Justification : On pose $z = x + iy$. On a alors :

$Z = z\overline{z} + 2z + i\overline{z} + \frac{1}{4} + 5i = (x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) + i(x - iy) + \frac{1}{4} + 5i$

$= x^2 + y^2 + 2x + 2yi + xi + y + \frac{1}{4} + 5i = x^2 + y^2 + 2x + y + \frac{1}{4} + i(x + 2y + 5)$

Z est un nombre réel $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

Donc M appartient à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ qui est l'ensemble recherché.

Proposition 5 : FAUSSE

Justification : $\left|\dfrac{z+1-i}{\bar{z}-i}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z+1-i|}{|\bar{z}-i|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-(-1+i)|}{|\overline{z+i}|} = 1$

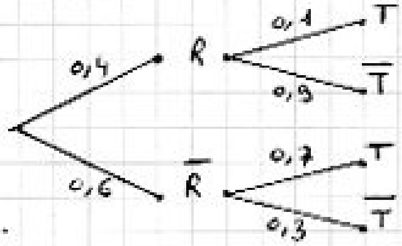
$\Leftrightarrow \dfrac{|z-(-1+i)|}{|z+i|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-(-1+i)|}{|z-(-i)|} = 1$. On considère les points A et B affixes $z_A = -1+i$ et $z_B = -i$

On a alors : $\dfrac{|z-(-1+i)|}{|z-(-i)|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow$ M appartient à la médiatrice de [AB].

L'ensemble recherché est donc une droite et non un cercle privé d'un point.

EXERCICE 2 PARTIE A

Arbre pondéré traduisant la situation :



1) Calcul de $p(T)$

$\{R, \overline{R}\}$ constituent un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales on a :

$p(T) = p(R)\times p_R(T) + p(\overline{R})\times p_{\overline{R}}(T) = 0,4\times 0,1 + 0,6\times 0,7 = 0,04 + 0,42 = \boxed{0,46}$

2) Calcul de $p_T(\overline{R})$.

Par définition : $p_T(\overline{R}) = \dfrac{p(\overline{R}\cap T)}{p(T)} = \dfrac{p(\overline{R})\times p_{\overline{R}}(T)}{p(T)} = \dfrac{0,6\times 0,7}{0,46} = \dfrac{0,42}{0,46} \approx \boxed{0,913}$

3) Calcul de la probabilité que le temps d'intervention ait été inférieur à 3h au moins deux fois.

On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à appeler la société Printspeed de succès $p = p(T) = 0,46$.

Appeler 7 fois consécutivement cette société de manière identique et indépendante peut être considéré comme un schéma de Bernoulli consistant à répéter l'épreuve de Bernoulli précédente.

La variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(7\,;0,46)$ de paramètres $n = 7$ et $p = 0,46$.

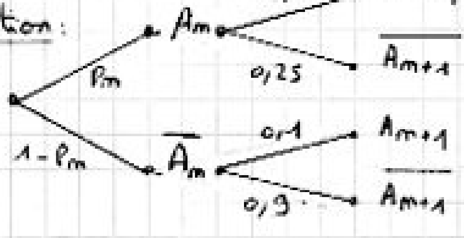
On nous demande ici de calculer :

$p(X \geq 2) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - \binom{7}{0}\times 0,46^0\times(1-0,46)^7 - \binom{7}{1}\times 0,46^1\times(1-0,46)^6$

$= 1 - 1\times 0,54^7 - 7\times 0,46\times 0,54^6 \simeq \boxed{0,907}$

PARTIE B

Arbre pondéré traduisant la situation :



1) Calcul de p_{n+1} :

$\{A_n ; \overline{A_n}\}$ constituent un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

$$= p_n \times 0{,}75 + (1 - p_n) \times 0{,}1 = 0{,}75\, p_n + 0{,}1 - 0{,}1\, p_n = 0{,}65\, p_n + 0{,}1 = \boxed{\frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10}}$$

2) Montrons que u_n est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{7} = \frac{13}{20} p_n + \frac{1}{10} - \frac{2}{7} = \frac{13}{20} p_n - \frac{13}{70} = \frac{13}{20}\left(p_n - \frac{2}{7}\right) = \boxed{\frac{13}{20} u_n}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{13}{20}$ et de premier terme : $u_1 = p_1 - \frac{2}{7} = \boxed{\frac{5}{7}}$

3) Expression de u_n en fonction de n :

(u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{13}{20}$ donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{5}{7} \times \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1}$

Expression de p_n en fonction de n.

$$u_n = p_n - \frac{2}{7} \iff p_n = u_n + \frac{2}{7} \iff p_n = \frac{5}{7} \times \left(\frac{13}{20}\right)^{n-1} + \frac{2}{7}$$

Déterminons le plus petit entier n tel que $p_n \leq 0{,}5$

- Si $n = 3$ on a : $p_3 = \frac{5}{7} \times \left(\frac{13}{20}\right)^{3-1} + \frac{2}{7} = 0{,}5875$
- Si $n = 4$ on a : $p_4 = \frac{5}{7} \times \left(\frac{13}{20}\right)^{4-1} + \frac{2}{7} = 0{,}481875$

Donc la probabilité qu'un technicien intervienne devient inférieure ou égale à 0,5 au bout de 4 semaines

---

Exercice 3 :

PARTIE A.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x + x + 1$

1) Étude du sens de variation de g.

- Calcul de $g'(x)$: g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g'(x) = e^x + 1$
- Etude du signe de $g'(x)$: Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $e^x > 0 \iff e^x + 1 > 0$

  Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$.
- Sens de variation de g : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Limite de g en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} e^x + x + 1 = +\infty$$

ou $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

Limite de g en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty \end{array}\right\} \text{Par somme, } \lim\limits_{x \to -\infty} e^x + x + 1 = -\infty$$

ou $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$

• <u>limite de f en $+\infty$</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{e^x}}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{e^x} = 1$

De plus $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Par quotient : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{e^x}} = \boxed{+\infty}$.

<u>Interprétation graphique</u> : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y=0$ est <u>asymptote horizontale</u> à (C_f) en $-\infty$.

. <u>Tableau de variation de f.</u>

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1+\alpha$	$\nearrow$	$+\infty$

5) <u>Equation de (T) la tangente à (C_f) en 0.</u>

(T) a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f'(0) = \frac{e^0(e^0+0+1)}{(e^0+1)^2} = \frac{1\times(1+1)}{(1+1)^2} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x}$

et $f(0) = \frac{0\times e^0}{e^0+1} = \frac{0\times 1}{1+1} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$

<u>Tracé de (T)</u> : Voir graphique.

<u>EXERCICE 4 :</u>

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

1) a) <u>Etude des variations de f sur $[0;+\infty[$.</u>

• <u>Calcul de $f'(x)$</u> : f est une fonction rationnelle définie sur $[0;+\infty[$ donc dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout $x\in[0;+\infty[$: $f'(x) = 0 - 5\times\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \boxed{\frac{5}{(x+1)^2}}$

• <u>Signe de $f'(x)$</u>. Pour tout $x\in[0;+\infty[$ on a : $5>0$ et $(x+1)^2>0$ donc $f'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$

. <u>Variations de f.</u> Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est <u>strictement croissante</u> sur $[0;+\infty[$

b) <u>Résolution de l'équation $f(x)=x$ sur $[0;+\infty[$.</u>

$f(x)=x \Leftrightarrow 6-\frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow 6-\frac{5}{x+1}-x=0 \Leftrightarrow \frac{6(x+1)-5-x(x+1)}{x+1}=0$

$\Leftrightarrow 6x+6-5-x^2-x=0 \Leftrightarrow -x^2+5x+1=0.$

<u>Calcul du discriminant</u> : $\Delta = 5^2-4\times(-1)\times 1 = 25+4 = 29$ $\Delta>0$ donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{29}}{2\times(-1)} = \frac{-5-\sqrt{29}}{-2} = \boxed{\frac{5+\sqrt{29}}{2}}$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{29}}{-2} = \frac{5-\sqrt{29}}{2}$

La solution x_2 est négative donc à rejeter. L'équation $f(x)=x$ a une unique solution α dans $[0;+\infty[$: $\boxed{\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}}$

3) Tableau de variation de g.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Montrons que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$, la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ (d'après le calcul des limites).

Or $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Encadrement de α à 10^{-2} près : $g(-1,28) \approx -0,002$ et $g(-1,27) \approx 0,011$.
Donc $g(-1,28) < g(\alpha) < g(-1,27) \Leftrightarrow \boxed{-1,28 < \alpha < -1,27}$ car g est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

5) Signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
D'après les questions précédents, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x+1}$

1) Calcul de $f'(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a.

$$f'(x) = \frac{(1\times e^x + x\times e^x)(e^x+1) - xe^x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+xe^x)(e^x+1) - xe^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x - xe^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^x \times g(x)}{(e^x+1)^2}}$$

2) Etude des variations de f.

. Signe de $f'(x)$.

. Variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$(e^x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

. Pour tout $x \in]-\infty;\alpha]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$
. Pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

3) Montrons que $f(\alpha) = \alpha+1$.

Par définition : $g(\alpha)=0 \Leftrightarrow e^\alpha+\alpha+1=0 \Leftrightarrow e^\alpha = -\alpha-1$

On en déduit que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \dfrac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1} = \dfrac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \boxed{\alpha+1}$

Pour A, voir graphique.

4) Limite de f en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1 = 1 \end{array}\right\}$$

Par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{xe^x}{e^x+1} = 0$

ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

c) Montrons que si $x \in [0;\alpha]$ alors $f(x) \in [0;\alpha]$. On sait que $f(\alpha)=\alpha$.

$x \in [0;\alpha] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \alpha \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$ car f est croissante sur $[0,+\infty[$
$\Leftrightarrow 6-\frac{5}{0+1} \leq f(x) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq \alpha$
Donc : $0 \leq f(x) \leq \alpha$

Donc $f(x) \in [0;\alpha]$.

Montrons que si $x \in [\alpha;+\infty[$ alors $f(x) \in [\alpha,+\infty[$.

$x \in [\alpha;+\infty[\Leftrightarrow x \geqslant \alpha \Leftrightarrow f(x) \geqslant f(\alpha)$ car f est croissant sur $[0,+\infty[$
$\Leftrightarrow f(x) \geqslant \alpha$ donc $f(x) \in [\alpha,+\infty[$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Construction de A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.
Voir graphique en annexe 3.

Conjectures : D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers α.

b) Démontrons par récurrence l'inégalité : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

• Initialisation : si $n=0$. on a : $u_0=0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ et $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2} \approx 5,2$

Donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ et la propriété est vraie au rang $n=0$.

• Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. (H.R)
Montrons qu'alors la propriété est vraie au rang suivant $n+1$.
On a alors. $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \Leftrightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$

On a bien : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : Nous avons montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

c) Montrons que (u_n) est convergente.

On a : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ donc (u_n) est croissante
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha$ donc (u_n) est majorée par α.
Or toute suite croissante et majorée est convergente donc la suite (u_n) est convergente.

Déterminons la limite de la suite (u_n). Soit L la limite de la suite (u_n).

On a : $\left.\begin{array}{l} \lim u_{n+1} = \lim u_n = L \\ \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(L) \end{array}\right\}$ par unicité de la limite, on a $L = f(L)$. Or α est l'unique solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation $f(x)=x$ donc $\boxed{\lim u_n = \alpha.}$

3) Variations et convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0
On remarque et on démontre facilement que sur l'intervalle $[0;\alpha[$ on a $f(x) \geqslant x$ et que sur l'intervalle $]\alpha;+\infty[$ on a $f(x) \leq x$.
On en déduit que si $u_0 \in [0;\alpha[$ on a $f(u_0) \geqslant u_0$ donc $u_1 \geqslant u_0$
si $u_0 \in]\alpha;+\infty[$ on a $f(u_0) \leq u_0$ donc $u_1 \leq u_0$
On démontrera donc par récurrence que :
- Si $u_0 \in [0;\alpha[$ on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ donc (u_n) est une suite croissante et majorée par α qui convergera vers α.
- Si $u_0 \in]\alpha;+\infty[$ on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \alpha$ donc (u_n) est une suite décroissante et minorée par α qui convergera vers α.
- Enfin si $u_0 = \alpha$, on aura $u_n = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc (u_n) est une suite constante.